Die nichteuklidische Geometrie

Was wäre, wenn es keine Parallelen gibt?

@kellertuer

MetaMeute, Chaotikum e.V.

MetaNooK 2018, Lübeck.

9. November 2018

Moin.

(Axiome der) euklidischen Geometrie

(Gegen-)Beispiel I: Die Sphäre

Nichteuklidische Geometrie

Beispiel II: Hyperbolische Geometrie

(Axiome der) euklidischen Geometrie

Was ist ein Axiom?

Definition. Axiom
Ein Axiom ist ein Grundsatz einer Theorie, einer Wissenschaft oder eines axiomatischen Systems, der innerhalb dieses Systems nicht begründet oder deduktiv abgeleitet wird.

Wikipedia/Axiom

Ein Axiom ist also ein unmittelbar einleuchtender Grundsatz. Auf Axiomen bauen dann Aussagen (Theoreme) auf

Ziel.
Einfaches, minimales Axiomensystem für eine Theorie.

Geschichte I – Euklid

- Verfasser der „Elemente“, bis ins 20. Jhd. Standardwerk zur Geometrie
- darin: Aufbau der Geometrie auf wenigen, klar gefassten Axiomen
- Sammlung von darauf aufbauenden Schlüssen
  (Sätzen & Beweisen)

Euklid von Alexandria
(um 300 v. Chr.)

Quelle:

wikimedia/file_Euklid_of_Alexandria_1.jpg

Die euklidische Geometrie – Begriffe

Die euklidische Geometrie ist zunächst die anschauliche Geometrie des Zwei- oder Dreidimensionalen.

(Wikipedia)

Zu Beginn definiert Euklid einige Begriffe:

- Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
- Eine Linie ist eine breitenlose Länge
- Eine Gerade ist eine unendlich lange Linie

…ähnlich werden Winkel und Ebenen definiert…

Die euklidische Geometrie – Begriffe

Die euklidische Geometrie ist zunächst die anschauliche Geometrie des Zwei- oder Dreidimensionalen.

(Wikipedia)

Zu Beginn definiert Euklid einige Begriffe:

- Ein Punkt ist eine dimensionslose Koordinate im Raum.
- Eine Strecke $\overline{AB}$ ist die Verbindung zweier Punkte A und B
- Eine Gerade ist eine unendlich lange Linie

…ähnlich werden Winkel und Ebenen definiert…

- Zwei Geraden in einer Ebene sind parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, sich also nicht „treffen".

Die euklidische Geometrie – Axiome 1-4

1. zwei Punkte können stets durch eine Linie verbunden werden
2. eine Linie kann stets zu einer Gerade ergänzt werden
3. um einen Punkt läßt sich ein Kreis beliebigen Radius schlagen
4. alle rechten Winkel sind einander gleich

Dazu gibt es weitere Axiome, die David Hilbert exakter formuliert, etwa

I 4. Drei nicht auf einer und derselben Gerade liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene.

(D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1903)

Geschichte II - David Hilbert

- Studium der Mathematik in Königsberg (ab 1880)
- Dissertation 1885, Habilitation 1886
- Professor in Königsberg, später München, dann Göttingen
- einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit
- 23 Hilbertsche Probleme
- „Grundlagen der Geometrie“, 1899/1903

David Hilbert
(1862–1943)

Quelle: wikimedia/Datei:Hilbert.jpg

Das 5. Euklidische Axiom: Parallelität

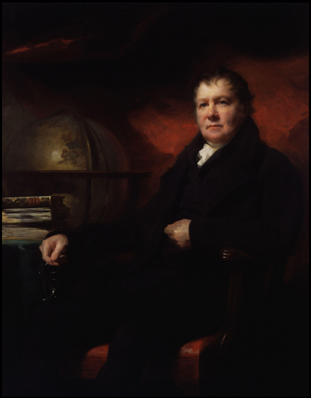
Gefordert soll sein: […] dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

(Euklid, „Elemente“, Quelle: Wikipedia)

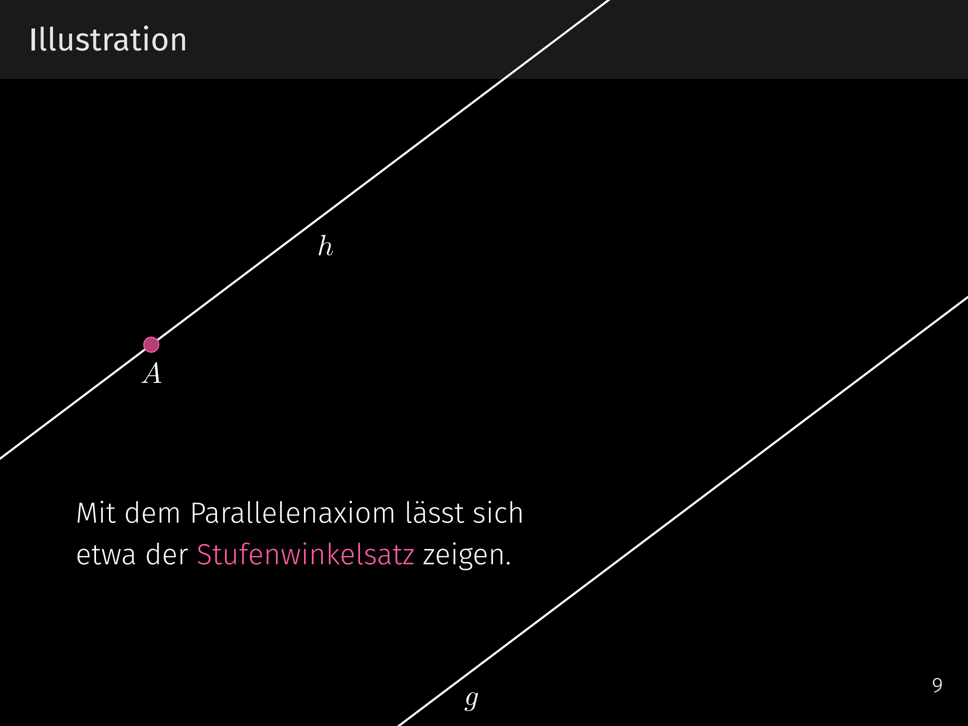
Parallelenaxiom

Sei g eine beliebige Gerade und A ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann gibt es in der durch g und A bestimmten Ebene nur eine Gerade h, die durch A verläuft und g nicht schneidet. Die Gerade h heißt Parallele zu g durch A.

(nach John Playfair)



John Playfair
(1746–1819)
Quelle: wikimedia/John_Playfair_by_Sir_Henry_Raeburn.jpg



Mit dem Parallelenaxiom lässt sich etwa der Stufenwinkelsatz zeigen.

(Gegen-)Beispiel I: Die Sphäre

Geometrie auf der Kugeloberfläche

Erstes Beispel, in dem es kein Parallelenaxiom gibt:
Die sphärische Geometrie mit den Axiomen

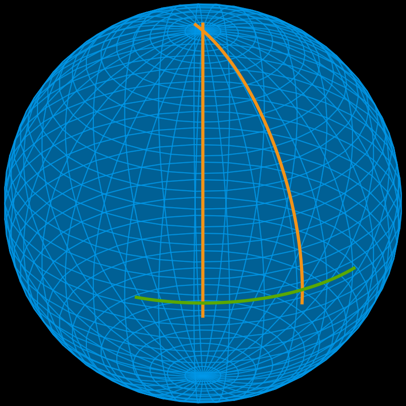
1. Geraden sind Punktmengen
2. Zwei verschiedene Geraden g, h haben stets genau zwei Punkte gemeinsam
3. Durch zwei nichtdiametrale Punkte verläuft genau eine Gerade
4. Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt
5. Es existieren 3 Punkte, die nicht einer gemeinsamen Gerade angehören

Sphärische Geraden sind Großkreise.

Zwei wesentliche Unterschiede zum Euklidischen

Auf der Kugeloberfläche gibt es keine Parallelen

3 Punkte auf einer (sphärischen) Geraden können nicht geordnet werden



Start in „gleiche Richtung" (Norden) zweier Geraden.

Beide Geraden haben zum Äquator einen rechten Winkel.

Weitere Gemeinsamkeiten und Unterschiede

- Punkte und Geraden lassen sich axiomatisch einführen
- Winkelsumme im Dreieck ist echt größer also 180°, lässt sich aber explizit angeben
- Keine Addition

Lange offene Fragen

...über 2000 Jahre (Griechenland, Arabien, Europa)

Lässt sich das 5. Axiom ausgehend von den andern 4 Axiomen beweisen?

Nein.

Ist das 5. Axiom unverzichtbar? Nein.

Nichteuklidische Geometrie

Gibt es eine Geometrie, in der
mehr als eine
Parallele durch A existiert?

- studierte Chemie und Pharmakologie, später Mathematik, Astronomie und Physik
- Professor Universität Kasan (Казань, Russland, 1918)
- erstes Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie (1826)

Gleichzeitig: János Bolyai (1923), vorher bereits J. C. F. Gauss, um 1817)

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856)

Quelle: wikimedia/Datei:Lobachevsky.jpg

Ansatz von Lobatschewski und Bolyai

- Es gelten die Axiome 1-4
- Es gilt die Verneinung des 5. Axioms

Dann lässt sich eine widerspruchsfreie Geometrie aufbauen.

Es gibt dann für eine Gerade und einen Punkt unendlich viele Parallelen

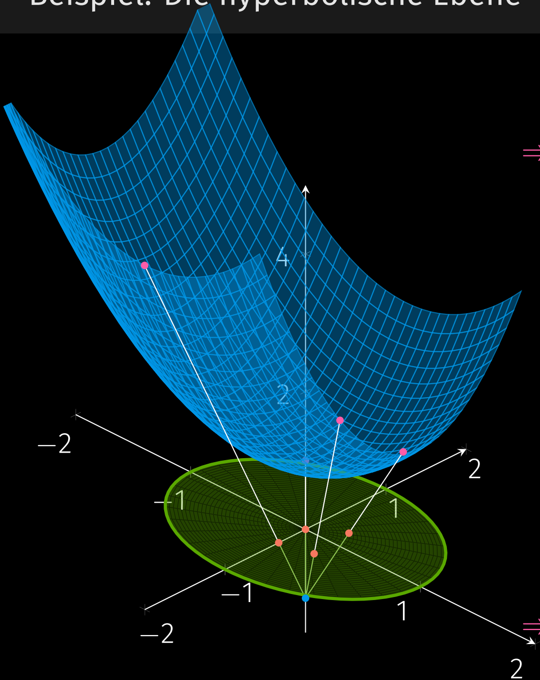
Beispiel II: Hyperbolische Geometrie

- studierte Mathematik in Paris
- Bauingenieur, Dozent für Mathematik in Caen, 1879
- Professor für Mechanik an der (Sorbonne, Paris, 1885)
- zus. Professor für Astronomie
- wichtige Beiträge zu Differentialgleichungen, Topologie, Geometrie

Jules Henri Poincaré
(1854–1912)

Quelle: wikimedia/File:Young_Poincare.jpg

Beispiel: Die hyperbolische Ebene



- Betrachten $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ $\mathbb{H}^2$: alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0.$$

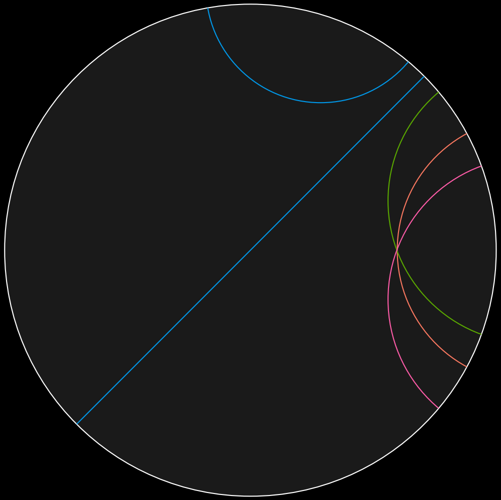
- Geraden: Schnitt $\mathbb{H}^2$ mit Ebene $A, B, 0$.
- Projektion: Schnittpunkt $(x, y, z) \to (0, 0, -1)$ mit $z = 0$:

$$\left(\frac{x}{2 + x^2 + y^2}, \frac{y}{2 + x^2 + y^2}, 0\right)$$

- jede Komponente ist < 1

$\Rightarrow$ Poincaré'sche Kreisscheibe

…als Poincaré'sche Kreisscheibe



- hyperbolische Geraden sind
  - Geraden durch den Ursprung
  - Kreise, so dass sie orthogonal auf dem Rand stehen.
- die beiden blauen Geraden sind parallel
- die drei bunten Geraden verlaufen durch einen Punkt und sind zu beiden blauen Geraden parallel

- studierte Mathematik in Göttingen
- Dissertation: Funktionentheorie
- Habilitation (1854): „Über Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"
- Differentialgeometrie mit lokal definierter Metrik
- Professor in Göttingen ab 1857

G. F. Bernhard Riemann
(1826–1866)

Quelle: wmedia/Datei:BernhardRiemannAWeger.jpg

Verallgemeinerung: Riemannsche Mannigfaltigkeiten

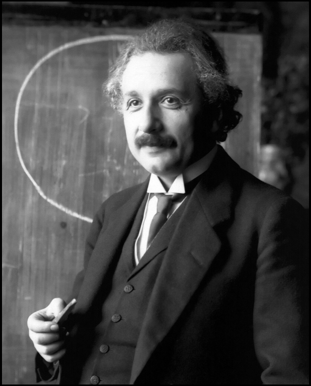
- Beschreibung der Oberfläche mittels (glatter) Karten
- glatte Kartenübergänge
- eine Methode zur Winkelmessung in jedem Punkt: Riemannsche Metrik

Die damit definierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben gekrümmte Räume beliebiger Dimension.

Spezialfälle: Sphäre, hyperbolischer Raum mit konstanten Krümmungen 1 bzw. -1.

Geschichte VI - Albert Einstein

- studierte Mathematik und Physik in Zürich
- spezielle Relativitätstheorie (1905)
- Dissertation 1906, Habilitation 1909
- Nobelpreis 1921: photoelektischer Effekt (1905)
- Professor in Prag 1911, ETH Zürich 1912
- allgemeine Relativitätstheorie 1915



Albert Einstein
(1879–1955)

Quelle:
wmedia/Datei:Einstein_1921_portrait2.jpg

Geschichte VII - Hermann Minkowski

- studierte Mathematik in Königsberg (ab 1880)
- Dissertation 1885 (zu einer Arbeit von 1881/3)
- Befreundet mit D. Hilbert, Lehrer A. Einsteins in Zürich
- ab 1902 Professor in Göttingen
- 1907/8: Vortrag „Raum und Zeit“

Hermann Minkowski (1864–1909)

Quelle: wikimedia/File:De_Raum_zeit_Minkowski _Bild_(cropped).jpg

Minkowski-Metrik & die spezielle Relativitätstheorie

- Seien $E = (t, x, y, z)$, $E' = (t', x', y', z')$, $t' > t$, in der Raumzeit.
- kennen für Abstände $(x - x', y - y', z - z')$ klassisch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

- In der Raumzeit wählt man für $(x - x', y - y', z - z', t - t')$

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

  c ist die Lichtgeschwindigkeit. Es gibt 3 Fälle:
  - $\mathrm{d}s^2 = 0$: E' für Beobachter an E sichtbar
  - $\mathrm{d}s^2 < 0$: zeitartig, E' *kann* Ursache für E sein
  - $\mathrm{d}s^2 > 0$: raumartig, E' *kann nicht* Ursache für E sein

Kurz: Minkowsi erkannte, dass nichteuklidische Geometrie die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie modelliert.

Zusammenfassung

- Parallelenaxiom für eine Geometrie nicht notwendig/hinreichend
- Mit dessen Verneinung: nichteuklidische Geometrie
- Einführung zunächst rein axiomatisch
- Beispiele: Sphäre, Hyperbolische Ebene
- Allgemeiner: Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Anwendungen

- Relativitätstheorie
- Statistik von Diffusionstensoren
- Shape-Manifold.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.